



Consiglio Nazionale delle Ricerche  
Istituto di Calcolo e Reti ad Alte Prestazioni

# **Analisi wavelet per immagini di risonanza magnetica affette da rumore**

E. Francomano, R. Barbiera, C. Macaluso

***Rapporto Tecnico N.:01***  
**RT-ICAR-PA-05-01**

**gennaio 2005**



Consiglio Nazionale delle Ricerche, Istituto di Calcolo e Reti ad Alte Prestazioni (ICAR)

– Sede di Cosenza, Via P. Bucci 41C, 87036 Rende, Italy, URL: [www.icar.cnr.it](http://www.icar.cnr.it)

– Sezione di Napoli, Via P. Castellino 111, 80131 Napoli, URL: [www.na.icar.cnr.it](http://www.na.icar.cnr.it)

– Sezione di Palermo, Viale delle Scienze, 90128 Palermo, URL: [www.pa.icar.cnr.it](http://www.pa.icar.cnr.it)



Consiglio Nazionale delle Ricerche  
Istituto di Calcolo e Reti ad Alte Prestazioni

# **Analisi wavelet per immagini di risonanza magnetica affette da rumore**

E. Francomano<sup>1,2</sup>, R. Barbiera, C. Macaluso,

***Rapporto Tecnico N.:01***  
**RT-ICAR-PA-05-01**

***Data:***  
**gennaio 2005**

---

<sup>1</sup> Istituto di Calcolo e Reti ad Alte Prestazioni, ICAR-CNR, Sezione di Palermo Viale delle Scienze edificio 11 90128 Palermo

<sup>2</sup> Università degli Studi di Palermo Dipartimento di Ingegneria Informatica Viale delle Scienze 90128 Palermo

*I rapporti tecnici dell'ICAR-CNR sono pubblicati dall'Istituto di Calcolo e Reti ad Alte Prestazioni del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Tali rapporti, approntati sotto l'esclusiva responsabilità scientifica degli autori, descrivono attività di ricerca del personale e dei collaboratori dell'ICAR, in alcuni casi in un formato preliminare prima della pubblicazione definitiva in altra sede.*

## 1. Introduzione

Il problema della classificazione dei tessuti in immagini di Risonanza Magnetica (RM) del cervello è stato affrontato negli ultimi anni da parecchi autori.

Una difficoltà che si presenta in tale studio è la rimozione del rumore causato soprattutto dalla variazione dei parametri di acquisizione dell'immagine tra un paziente e l'altro e tra una zona del cervello e l'altra. La correzione degli effetti del rumore è richiesta per ogni singola immagine in esame richiedendo pertanto tempo di elaborazione significativi.

In questo lavoro viene utilizzata la trasformata wavelet nell'ambito dell'elaborazione di tali immagini. Il vantaggio di tale trasformata consiste nel fatto che essa tende a concentrare l'energia di un determinato segnale  $f$  in un piccolo numero di coefficienti. Infatti nel filtraggio wavelet i coefficienti con poca energia, che rappresentano in genere i coefficienti rumorosi, vengono scartati e, successivamente, il segnale può essere ricostruito tramite la trasformata inversa.

La trasformata di Fourier, a differenza delle trasformate wavelet, realizza un filtraggio che, in quanto operazione globale, non riesce a rimediare alle variazioni locali di energia lasciando un eccessivo smoothing nelle regioni dove l'immagine ha un'alta frequenza. Per questa ragione e per il fatto che il supporto localizzato delle funzioni base utilizzate dalla funzione wavelet abilitano la trasformata ad adattarsi alle variazioni spaziali del segnale, la trasformata wavelet assume un ruolo importante nel denoising delle immagini.

## 2. La Trasformata Wavelet Discreta (DWT)

Consideriamo una funzione 1-D,  $f(t) \in L^2(R)$ . Definiamo sviluppo wavelet in serie di  $f(t) \in L^2(R)$ , relativamente ad una funzione wavelet  $\psi(t)$  e ad una funzione di scaling  $\varphi(t)$ , l'espressione:

$$f(t) = \sum_k c_{j_0}(k) \varphi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k d_j(k) \psi_{j,k}(t) \quad (1)$$

dove  $j_0$  è un'arbitraria scala di partenza e i termini  $c_{j_0}(k)$  e  $d_j(k)$  vengono ottenuti come:

$$c_{j_0}(k) = \int f(t) \varphi_{j_0,k}(t) dt \quad (2)$$

$$d_j(k) = \int f(t) \psi_{j,k}(t) dt \quad (3)$$

e rappresentano rispettivamente *coefficienti di approssimazione o di scaling* e *coefficienti di dettaglio o wavelet*.

Tale trasformazione si può riportare nel discreto: sia  $t$  una variabile discreta ossia  $t = 0, 1, 2, \dots, M-1$ , e siano  $f(t)$ ,  $\psi_{j,k}(t)$  e  $\varphi_{j_0,k}(t)$  funzioni anch'esse a variabili discrete. La *Discret Wavelet Transform (DWT)* si ottiene isolando i due termini corrispondenti rispettivamente ai *coefficienti di approssimazione* e ai *coefficienti wavelet*:

$$W_{\varphi}(j_0, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_t f(t) \varphi_{j_0,k}(t) \quad (4)$$

$$W_{\psi}(j, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_t f(t) \psi_{j,k}(t) \quad (5)$$

La trasformata inversa, *IDWT*, viene definita invece come:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k W_\varphi(j_0, k) \varphi_{j_0, k}(t) + \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k W_\psi(j, k) \psi_{j, k}(t) \quad (6)$$

Per il calcolo della DWT2, cioè della trasformata wavelet in due dimensioni, sono richieste tre funzioni wavelet ciascuna di esse calcolate come prodotto di funzioni di *scaling* e *wavelet* monodimensionali. A queste si aggiunge una funzione di scaling 2-D. Esse sono definite dalle seguenti equazioni:

$$\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y) \quad (7)$$

$$\psi^H(x, y) = \psi(x)\varphi(y) \quad (8)$$

$$\psi^V(x, y) = \varphi(x)\psi(y) \quad (9)$$

$$\psi^D(x, y) = \psi(x)\psi(y) \quad (10)$$

Le wavelet dalla (8) alla (10) misurano le variazioni funzionali, le variazioni dell'intensità o del livello di grigio per un'immagine lungo differenti direzioni:  $\psi^H$  misura le variazioni lungo le colonne (individuazione di edge orizzontali),  $\psi^V$  misura le variazioni lungo le righe (edge verticali) e  $\psi^D$  corrisponde alla variazioni lungo la diagonale. A titolo di esempio vengono riportate le funzioni *wavelet* e di *scaling* di Haar:

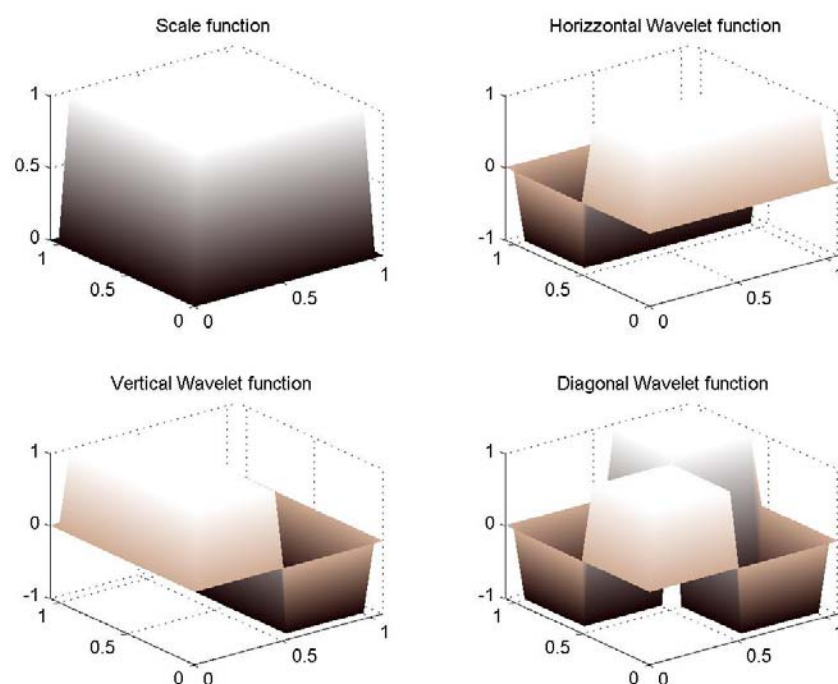


Fig. 1 - Scaling e wavelet function 2-D di Haar

E' possibile enunciare la trasformata discreta 2-D definendo prima le *funzioni di base scalate* e *traslate*:

$$\varphi_{j,m,n}(x,y) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - m, 2^j y - n) \quad (11)$$

$$\psi_{j,m,n}^i(x,y) = 2^{j/2} \psi^i(2^j x - m, 2^j y - n) \quad (12)$$

dove l'indice  $i$  identifica le diverse *wavelet direzionali*, pertanto  $i$  è rappresentativo delle tre direzioni H,V, D.

La trasformata wavelet discreta, DWT2, di un segnale 2-D,  $f(x,y)$  di dimensioni  $M \times N$  è allora definita dalla seguente coppia di equazioni :

$$W_\varphi(j_0, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \varphi_{j_0, m, n}(x,y) \quad (13)$$

$$W_\psi(j, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \psi_{j, m, n}^i(x,y) \quad (14)$$

come nel caso 1-D  $j_0$  è la scala di partenza e (13) e (14) rappresentano rispettivamente i coefficienti di *scaling* e di dettaglio.

La trasformata inversa, IDWT2, viene definita invece come:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \left[ \sum_m \sum_n W_\varphi(j_0, m, n) \varphi_{j_0, m, n}(x,y) \right] + \frac{1}{\sqrt{MN}} \left[ \sum_{i=H,V,D} \sum_{j=j_0} \sum_m \sum_n W_\psi^i(j, m, n) \psi_{j, m, n}^i(x,y) \right] \quad (15)$$

Data la sua natura, la trasformata wavelet viene spesso implementata da un banco di filtri (teoria della codifica sub-band) che si alternano tra passa-basso e passa-alto. Le motivazioni di ciò sono dovute al fatto che le componenti di bassa frequenza del segnale sono legate al suo andamento generale e quindi ai coefficienti di approssimazione, mentre le componenti ad alta frequenza ai dettagli e quindi ai coefficienti di dettaglio.

Il processo di scomposizione wavelet è schematizzato nella figura a seguire:

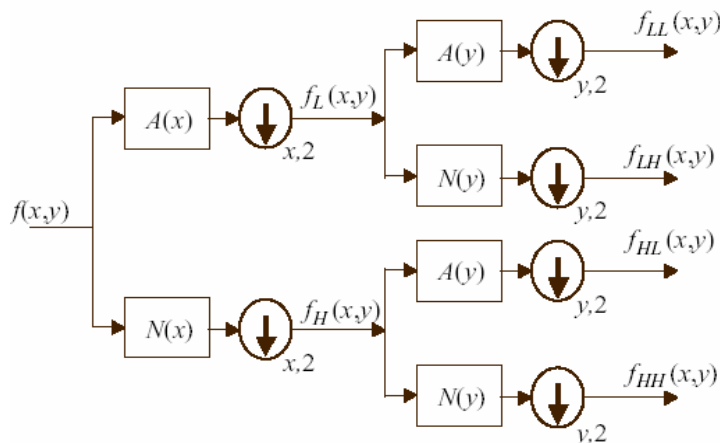


Fig. 2 - Processo di scomposizione wavelet

Il simbolo  $\downarrow$  indica l'operazione di sotto-campionamento che viene eseguita o per righe o per colonne,  $A(x)$  rappresenta il filtro passa-basso di scomposizione mediante convoluzione per righe con l'immagine e  $N(x)$  il filtro passa-alto di scomposizione. All'uscita del processo otteniamo:

$f_{HH}(x, y)$  che rappresenta i dettagli diagonali;  $f_{LH}(x, y)$  che identifica i dettagli verticali;  $f_{HL}(x, y)$  quelli orizzontali e infine  $f_{LL}(x, y)$  i coefficienti di approssimazione. Nella fase di trasformazione inversa le operazioni sono identiche solo che si utilizza il sovra-campionamento, indicato dal simbolo  $\uparrow$ , come mostrato nella figura a seguire:

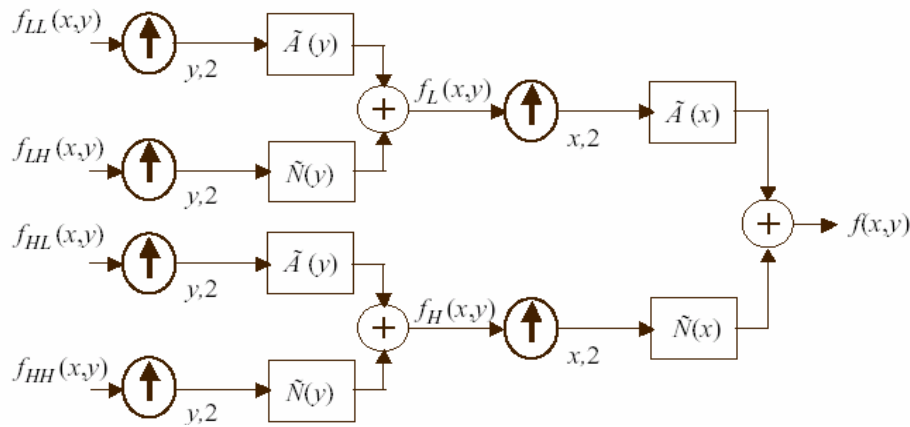


Fig. 3 - Processo di ricostruzione

La presenza dei filtri passa-basso e passa-alto è di notevole riscontro pratico. Molto spesso infatti le scaling e wavelet function vengono dedotte rispettivamente dai filtri passa-basso e passa-alto opportunamente moltiplicati. Consideriamo  $h$  e  $g$  due filtri selezionati da una famiglia di wavelet . Da questi otteniamo le funzioni di scaling e wavelet come:

$$\phi(x/2) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(x-n) \quad (16)$$

$$\psi(x/2) = \sqrt{2} \sum_n g_n \psi(x-n) \quad (17)$$

dove  $h$  e  $g$  rappresentano i filtri passa-basso e passo-alto..

Una volta ottenute le wavelet e scaling function è possibile produrre le scomposizioni wavelet dell'immagine.

I coefficienti relativi all'approssimazione,  $f_{LL}$ , e i coefficienti relativi ai dettagli,  $f_{HL}$ ,  $f_{LH}$ ,  $f_{HH}$ , possono ottenersi in maniera ricorsiva tramite :

$$c_m^{j+1} = \sum_n h_{2m-n} c_n^j \quad (18)$$

$$d_m^{j+1} = \sum_n g_{2m-n} c_n^j \quad (19)$$

La ricorsione parte inizializzando il termine  $c_k^0 = f(k)$  dove  $f(k)$  rappresenta un generico segnale discreto 1D. Nella figura 4 viene mostrata l'operazione di scomposizione wavelet discreta applicata ad una immagine RM dove si è scelto un livello di scomposizione pari ad uno e funzioni di base di Haar:

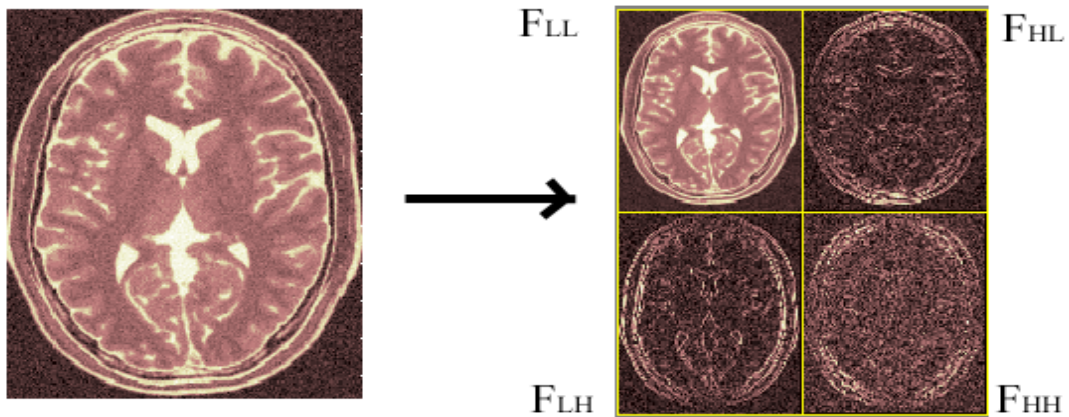


Fig. 4– Scomposizione Wavelet ad un livello

### 3 Filtraggio nel dominio wavelet

L'operazione di trasformazione wavelet discreta bidimensionale rappresenta un'immagine in termini di coefficienti delle funzioni *wavelet* e di *scaling* che sono rappresentate rispettivamente da  $\psi_{k,l}^{j,o}$  e  $\phi_{j,k,l}$ . In quest'ultime gli indici corrispondenti sono rappresentativi di:

$j$ : scala;

$o$ : orientamento della wavelet, ossia orizzontale, verticale, diagonale;

$k, l$ : posizione;

Al fine di mantenere la notazione semplice gli indici vengono omessi e sostituiti da un indice generale  $I$  tale che le precedenti diventano:  $\psi_I$  e  $\phi_I$ . Inoltre le operazioni di filtraggio vengono svolte per colonna ossia vettorizzando le funzioni *wavelet* e di *scaling* e l'immagine stessa,  $s$ ; quindi viene fornito un indice che rappresenta il numero di colonna crescente  $m$ . Da questo vengono prodotti l' $I$ -esimo coefficiente di scaling e wavelet come:

$$c_I = \sum_m \phi_I(m) s(m) \quad (20)$$

$$d_I = \sum_m \psi_I(m) s(m) \quad (21)$$

I coefficienti di scaling e wavelet vengono memorizzati in due vettori rispettivamente  $\bar{c}$  e  $\bar{d}$ .

Le ragioni per cui si utilizza la trasformata wavelet discreta, come precedentemente detto, sono legate al fatto che il numero di coefficienti wavelet che non contengono informazioni significative sull'energia del segnale sono numerosi.

Un algoritmo di filtraggio nel dominio wavelet prevede innanzitutto il calcolo della trasformata wavelet discreta 2-D di un'immagine rumorosa  $\bar{s}$ . Da questa operazione si ricavano i coefficienti scaling e wavelet rumorosi indicati rispettivamente con  $\bar{c}$  e  $\bar{d}$ . L'obiettivo è quello di ottenere una stima dei coefficienti wavelet che sia priva di rumore filtrando i coefficienti rumorosi  $\bar{d}$ . Considerando che  $\bar{d}$  proviene dalle funzioni wavelet, è necessario attenuare il contributo della stessa funzione wavelet  $\psi_I$ . Questo può essere realizzato moltiplicando i corrispondenti coefficienti per un parametro compreso tra 0 e 1 ossia,  $0 \leq \alpha_I \leq 1$ :

$$\hat{d}_I = \alpha_I d_I \quad (22)$$

In tal modo è possibile attenuare quei coefficienti wavelet che contengono più rumore che segnale e lasciare invariati i coefficienti che contengono informazioni sul segnale. Infatti assegnando  $\alpha_I = 0$

eliminiamo il contributo della wavelet function  $\psi_l$ , invece con  $\alpha_l = 1$  lasciamo la  $\psi_l$  inalterata e infine scegliendo  $0 < \alpha_l < 1$  attenuiamo sempre la  $l$ -esima wavelet function .

Dopo aver compiuto queste operazioni per ogni  $d_l$  e avere ottenuto il vettore  $\hat{d}_l$  è possibile calcolare la trasformata inversa che produrrà una nuova immagine,  $\hat{s}$ . I filtri  $\bar{\alpha} = \{\alpha_l\}$  sono chiamati *wavelet-domain filter*.

### 3.1. Filtraggio $\alpha$

Si assuma che il coefficiente wavelet rumoroso sia una stima del valore del coefficiente wavelet del segnale e si denoti il suo valore atteso come:

$$\delta_l = E[d_l] \quad (23)$$

Il termine  $\delta_l$  rappresenta il coefficiente wavelet del segnale privo di rumore. Da questo si può derivare il filtro che minimizza l'errore quadratico medio, *mean square error*, MSE, per ogni coefficiente:

$$\alpha_l^{MSE} = \frac{\delta_l^2}{\delta_l^2 + \sigma_l^2} \quad (24)$$

dove  $\sigma_l^2$  rappresenta la varianza di  $d_l$ . L'espressione ottenuta è facilmente deducibile minimizzando appunto la quantità  $E[(\delta_l - \alpha_l d_l)^2]$  rispetto ad  $\alpha_l$ . Sfortunatamente la precedente operazione richiede la conoscenza di  $\delta_l$  e  $\sigma_l^2$ . In particolare la stima della varianza può essere dedotta dai pixel di sfondo presenti nelle immagini RM. Tipicamente le immagini RM includono delle regioni che sono situate fuori dall'area occupata dal paziente. E' proprio in queste regioni, dove si ipotizza che il segnale sia uguale a zero, che si concentra il rumore sicché si ottiene una stima della varianza definita da :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N r_i^2 \quad (25)$$

dove  $N$  rappresenta il numero di pixel che si trovano fuori dall'area occupata dal paziente e  $r^2$  i valori di tali pixel .

Tuttavia le difficoltà stanno proprio nel fatto di non conoscere la  $\delta_l$ . Si può però ricorrere ad una soluzione pratica usando invece del vero valore una stima. Un possibile stimatore è costituito da:

$$\hat{\delta}_l^2 = (k d_l^2 - \sigma_l^2)_+ \quad (26)$$

dove  $d_l^2$  è il quadrato dell'  $l$ -esimo coefficiente wavelet,  $k > 0$  è una costante e l'operatore  $(...)_+$  sta per "parte positiva di" ossia:

$$\begin{cases} (x)_+ = x \Rightarrow x \geq 0 \\ (x)_+ = 0 \Rightarrow x < 0 \end{cases} \quad (27)$$

Si supponga ora che il coefficiente wavelet sia una variabile gaussiana a media zero e varianza  $\gamma^2$ ,  $d_l \rightarrow N(0, \gamma^2)$ , con  $\gamma^2 = \delta_l^2 + \sigma_l^2$  e considerando  $n$  variabili gaussiane con le stesse proprietà di  $d_l$  ossia  $x_1, \dots, x_n$ . Si vuole trovare la stima migliore di  $\hat{\gamma}^2 = k(x_1^2 + \dots + x_n^2)$  secondo il criterio del MSE ossia minimizzare  $E[(\gamma^2 - \hat{\gamma}^2)^2]$ . E' noto che  $k = \frac{1}{n+2}$ , ed essendo  $n = 1$ , si ha



$k = 1/3$ . Da questo il minimo della precedente è dato per  $\hat{\gamma}^2 = d_I^2/3$  sostituendo  $\hat{\delta}_I^2$  e  $\hat{\gamma}^2$  nell'equazione (24) si ottiene il valore stimato di  $\alpha$  :

$$\alpha_I = \left( \frac{d_I^2 - 3\sigma_I^2}{d_I^2} \right)_+ \quad (28)$$

L'andamento di  $\alpha$  è mostrato nella figura seguente:

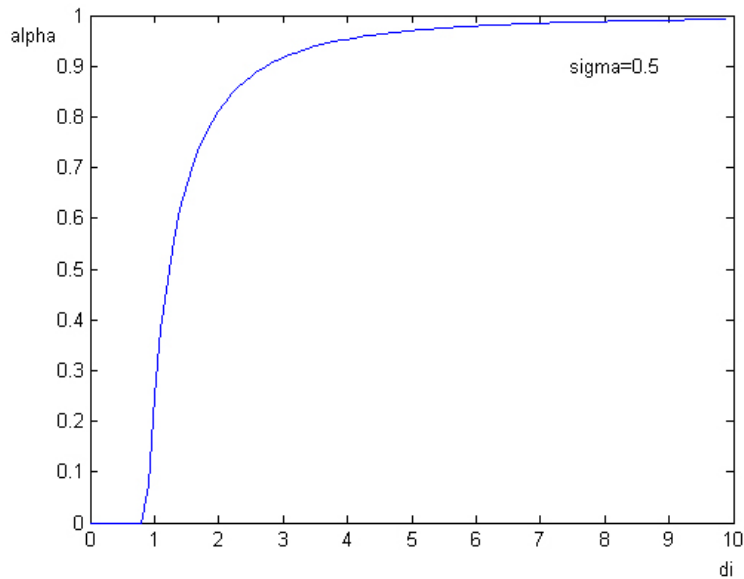


Fig. 6

L'azione svolta dai precedenti filtri è quella di porre a zero quei coefficienti wavelet con modulo quadro minore di tre volte la varianza e lasciare inalterati la maggior parte degli stessi.

### 3.2 Wavelet Shrinkage Denoising

Nell'ambito wavelet, come si è visto, le tecniche di denoising si basano sul thresholding dei coefficienti wavelet. Per quanto riguarda le tecniche di thresholding più diffuse è possibile distinguere tra l'hard thresholding e il soft thresholding. L'hard thresholding è la tecnica più semplice, ma crea delle discontinuità nei punti di soglia. Il soft thresholding ha delle buone proprietà matematiche. L'immagine seguente mostra le due tecniche nel caso di un semplice segnale del tipo  $y=x$ .

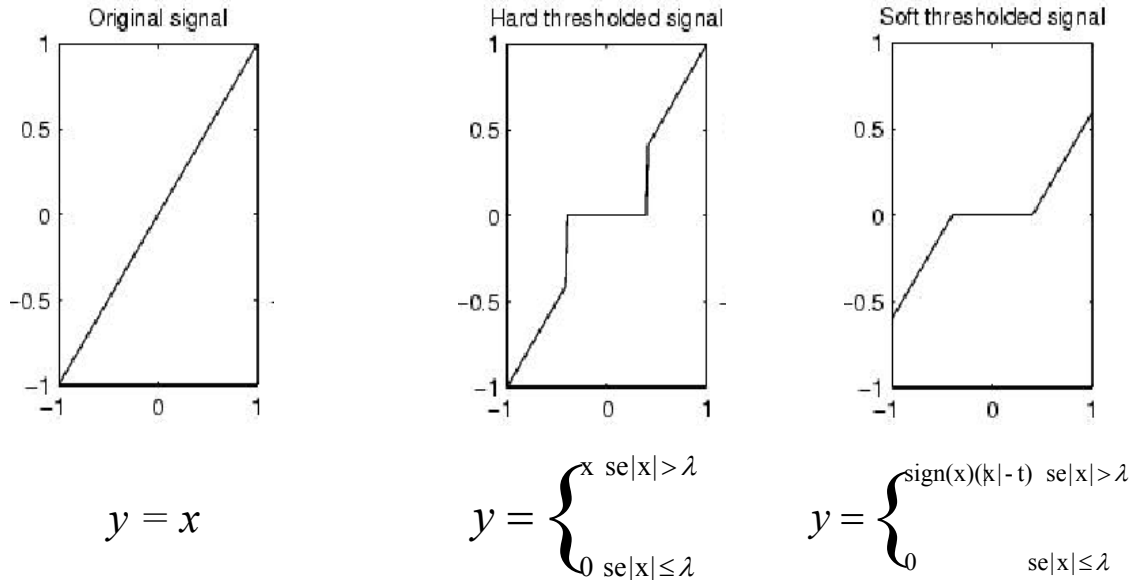


Fig. 6

Consideriamo il segnale osservato come funzione dipendente dal tempo (o spazio):

$$X(t) = S(t) + N(t) \quad (29)$$

Esso è composto dal segnale reale  $S(t)$  e dal disturbo  $N(t)$ .

Siano  $W(\cdot)$  e  $W^{-1}(\cdot)$  rispettivamente gli operatori di trasformata wavelet diretta ed inversa. Indichiamo con  $D(\cdot, \lambda)$  l'operatore di denoising che applica un soft thresholding utilizzando la soglia  $\lambda$ .

Mediante il *wavelet shrinkage denoising* di  $X(t)$  si cerca di ottenere  $\hat{S}(t)$  come stima del segnale  $S(t)$  privo del rumore mediante una procedura in tre passi rappresentata dalle espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} 1) & \quad Y = W(X) \\ 2) & \quad Z = D(Y, \lambda) \\ 3) & \quad \hat{S}(t) = W^{-1}(Z) \end{aligned} \quad (30)$$

Nell'ambito del thresholding il problema più grande che si pone è quello della scelta di un opportuno valore di soglia  $\lambda$ . Supponendo che il segnale  $X(t)$  venga campionato e che esso nella sua forma discreta sia costituito da  $n$  campioni:

$$X_i = X(t_i) \quad (31)$$

per una trasformata Wavelet ortogonale applicata al segnale campionato  $X(t)$  si ottengono ulteriori  $n$  coefficienti  $Y_j$ .

La scelta del valore di soglia può essere effettuata utilizzando una soglia che dipende solamente da  $n$ . In tal modo  $\lambda$  è fissato per ogni valore di  $n$  ed è possibile utilizzare la procedura di thresholding in tre passi descritta sopra. E' possibile in alternativa scegliere un valore di soglia dipendente dai dati  $\lambda = d(Y)$  ossia che dipende non più direttamente da  $n$  ma dal segnale trasformato  $Y$ .

La procedura in tre passi viene modificata dall'aggiunta di un successivo passo come segue:

$$\begin{aligned} 1) & \quad Y = W(X) \\ 2) & \quad \lambda = d(Y) \\ 3) & \quad Z = D(Y, \lambda) \\ 4) & \quad \hat{S}(t) = W^{-1}(Z) \end{aligned} \quad (32)$$

Nell'ambito della scelta del valore della soglia nella sperimentazione condotta sulle immagini di risonanza magnetica del cervello, sono state individuate le tecniche descritte in seguito.

### Universal Threshold (UT)

Il valore della soglia  $\lambda$  dipende solamente dal numero di campioni e risulta calcolato secondo la formula seguente:

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \log(n)} \quad (33)$$

dove  $\sigma$  rappresenta la deviazione standard del disturbo ed è stimata dalla (25):

$$\sigma = \frac{\text{median}(D)}{0.6745} \quad (34)$$

essendo  $D$  il vettore di tutti i coefficienti di dettaglio della scomposizione wavelet.

### Level Dependent Threshold (LDT)

Il valore della soglia  $\lambda$  dipende dal numero di campioni e dal livello di scomposizione wavelet.

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \log(n)} 2^{(j-J)/2} \quad \text{per } j = 0, 1, \dots, J \quad (35)$$

dove  $\sigma$  rappresenta la deviazione standard stimata come sopra;  $J$  è il numero di livelli wavelet in cui è scomposto il segnale e  $j$  è il livello al quale applicare la soglia.

### Penalized Threshold (PT) di Birgè e Massart

Il valore della soglia  $\lambda$  dipende dai valori dei coefficienti wavelet.

$$\lambda = |c(t^*)|$$
$$t^* = \min_t \left[ - \sum_{k=0}^t c^2(k) + 2\sigma^2 t \left( a + \log \frac{n}{t} \right) \right] \quad (36)$$

dove  $a$  è un coefficiente  $>1$ ,  $\sigma^2$  rappresenta la varianza del rumore e i  $c(k)$  rappresentano i coefficienti wavelet ordinati in ordine crescente rispetto al loro valore assoluto.

Quest'ultima tecnica di thresholding è quella che ha dato i migliori risultati rispetto alle altre due nell'ambito del wavelet shrinkage denoising ed è quella scelta nella sperimentazione condotta sulle immagini RM del cervello.

## **5. Risultati sperimentali**

Per poter valutare in termini qualitativi gli algoritmi di denoising finora esposti è necessario definire dei criteri oggettivi che prescindano dalla mera osservazione e valutazione umana. Tali criteri si basano su degli opportuni indici rappresentativi della qualità dell'immagine prodotta in seguito al denoising e spesso si basano sulla conoscenza a priori dell'immagine priva di rumore. I risultati sperimentali presentati si basano su applicazioni delle tecniche di denoising esposte ad immagini sintetiche prodotte da BrainWeb [9]. Utilizzando il BrainWeb è possibile ottenere sia immagini prive di rumore che immagini affette da un'opportuna percentuale di rumore. I risultati di seguito esposti vengono dedotti applicando opportune misure di fedeltà a tali immagini.

Nel seguito vengono esposti i criteri oggettivi presi in considerazione per la valutazione della bontà degli algoritmi di denoising:

### Errore Quadratico Medio

Un buon esempio di criterio di fedeltà oggettivo è l'*errore quadratico medio (rms)* tra l'immagine priva di rumore  $f(x,y)$  e l'immagine affetta da rumore  $\hat{f}(x,y)$ . Esso è calcolato come:

$$e_{rms} = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left[ \hat{f}(x,y) - f(x,y) \right]^2} \quad (37)$$

### Rapporto Segnale/rumore

Un altro criterio oggettivo, abbastanza correlato con il precedente, è costituito dal *rapporto segnale-rumore* tra l'immagine originale  $f(x,y)$  e quella affetta da rumore  $\hat{f}(x,y)$ . Esso è definito come:

$$SNR = 20 \log_{10} \frac{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left[ \hat{f}(x,y) \right]^2}{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left[ \hat{f}(x,y) - f(x,y) \right]^2} \quad (38)$$

Come è facile vedere, maggiore è l'SNR, migliore è la qualità dell'immagine dato che essa approssima l'originale.

Un'ulteriore stima del rapporto segnale-rumore è data da Sijbers in [12]. La stima di Sijbers è rappresentata dalla seguente espressione:

$$SNR_s = 20 \log_{10} \frac{\sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left[ \hat{f}(x,y) \right]^2}}{\sigma} \quad (39)$$

Dove  $\sigma$  rappresenta la deviazione standard del rumore che può essere stimata nelle immagini RM del cervello utilizzando lo sfondo ed  $\hat{f}(x,y)$  rappresenta l'immagine affetta da rumore.

I risultati sperimentali che vengono presentati nel presente paragrafo hanno lo scopo di paragonare gli algoritmi di denoising nel dominio wavelet. La valutazione è realizzata mediante il calcolo delle misure oggettive presentate precedentemente: rms, SNR,  $SNR_s$

I valori di riferimento sono calcolati considerando l'immagine rumorosa di partenza. Vengono proposti inoltre i valori delle misure oggettive applicando il filtraggio adattivo nel dominio spaziale [2] allo scopo di confrontare quest'ultimi con i risultati ottenuti mediante filtraggio nel dominio wavelet.

*Esempio 1*

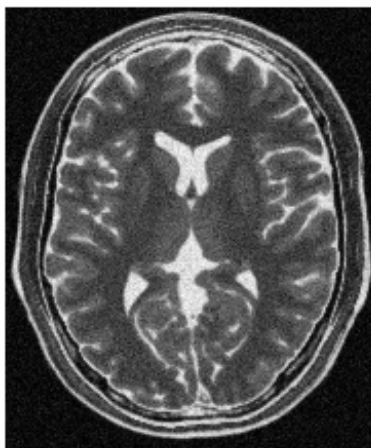


Fig. 7 – Immagine da BrainWeb con rumore del 5%

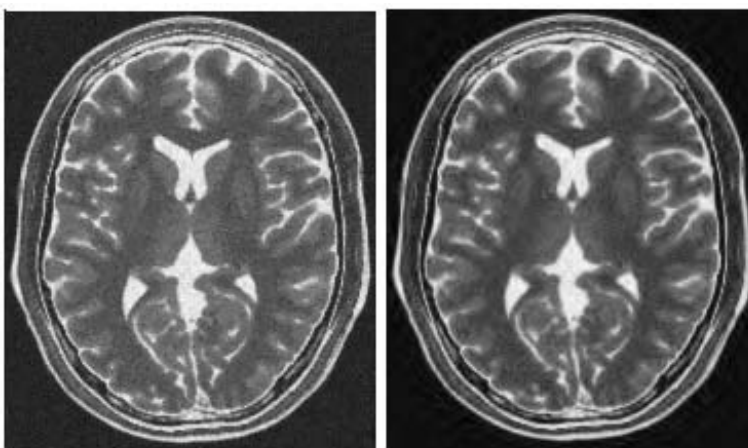


Fig. 8 – Immagini ottenute mediante filtraggio wavelet di tipo  $\alpha$  e di Birgè-Massart

<b>Algoritmo</b>	<b>rms</b>	<b>SNR</b>	<b>SNR<sub>s</sub></b>
<b>Filtro Adattivo</b>	19,54	26,29 db	24,49 db
<b>Wavelet – Filtro <math>\alpha</math></b>	20,58	25,30 db	26,07 db
<b>Wavelet – Birgè-Massart</b>	20,70	25,05 db	27,82 db

(Valori di riferimento: rms=23,22, SNR=23,76db, SNR<sub>s</sub>=21,66db)

*Esempio 2*



Fig. 9 – Immagine da BrainWeb con rumore del 9%

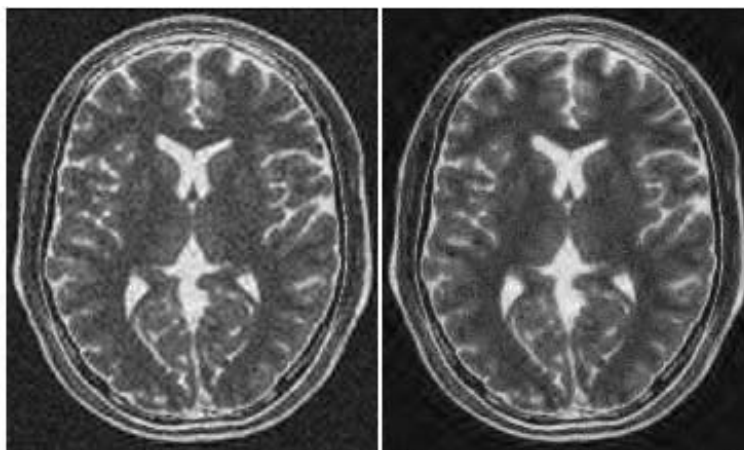


Fig. 10 – Immagini ottenute mediante filtraggio wavelet di tipo  $\alpha$  e di Birgè-Massart

Algoritmo	rms	SNR	SNR <sub>s</sub>
<b>Filtro Adattivo</b>	30,97	16,40 db	20,44 db
<b>Wavelet – Filtro <math>\alpha</math></b>	30,81	16,19 db	21,84 db
<b>Wavelet – Birgè-Massart</b>	32,37	15,21 db	24,75 db

(valori di riferimento: rms=32,15 - SNR=15,9 db - SNR<sub>s</sub>=11,70 db)

## **Bibliografia**

- [1] B. K. P. Horn, *Robot vision*, New York: McGraw-Hill, 1986.
- [2] R.G. Gonzalez, R.E.Woods, *Digital image processing – Second Edition*, Prentice-Hall, 2002
- [3] J.Koenderik, *The Structure of Images*, Biological Cybernetics, Vol. 50 pp. 363-370, 1984
- [4] A. Hummel, *Representation based on zero-crossing in scale-space*, Proc. IEEE Comput. Soc. Conf. Comput. Vision Patt. Recogn., June 1986
- [5] L. Nirenberg, *A strong maximum principle for parabolic equations*, Comm. Pure and Appl. Maths., Vol. 6 pp.167-177, 1953
- [6] G.Z. Yang, P. Burger, D.N.Firmin, S.R. Underwood, *Structure adaptive anisotropic filtering*, Images and Vision Computing, n.14, 1996.
- [7] R.D.Nowak, *Wavelet-based rician noise removal for MRI*, IEEE Transaction on image processing Vol. 8 n. 10, Oct.1999.
- [8] R. D. Nowak and R. G. Baraniuk, *Wavelet-domain filtering for photon imaging systems*, Proc. SPIE, Wavelet Applications in Signal and Image Processing V, vol. 3169 pp. 55–66, Aug. 1997
- [9] <http://www.bic.mni.mcgill.ca/brainweb/>
- [10] C.A. Cocosco, V. Kollokian, R.K.-S. Kwan, A.C. Evans, *BrainWeb: Online Interface to a 3D MRI Simulated Brain Database*, NeuroImage, vol.5, no.4, part 2/4, S425, Proceedings of 3-rd International Conference on Functional Mapping of the Human Brain, Copenhagen, May 1997.
- [11] R.K.-S. Kwan, A.C. Evans, G.B. Pike, *MRI simulation-based evaluation of image-processing and classification methods*, IEEE Transactions on Medical Imaging, Vol.18 n.11 pp.1085-97, Nov 1999
- [12] J.Sijbers, A.J. Den Dekker, A.Van Der Linden, M.Verhoye, D.Van Dick, *Adaptive Anisotropic Noise Filtering for Magnitude MR Data*, Magnetic Resonance Imaging, Vol. 17 n.10, 1999
- [13] D.L. Donoho , *De-Noising by soft-thresholding*, IEEE Trans. on Inf. Theory, vol. 41, 3, pp. 613-627, 1995.
- [14] D.L. Donoho, I.M. Johnstone, *Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage*, Biometrika, vol 81, pp. 425-455, 1994.
- [15] Donoho, D.L., *Progress in wavelet analysis and WVD: a ten minute tour*, in Progress in wavelet analysis and applications, Y. Meyer, S. Roques, pp. 109-128. Frontières Ed., 1993
- [16] Birgé, L.; P. Massart, *From model selection to adaptive estimation*, in D. Pollard (ed), Festschrift for L. Le Cam, Springer, pp. 55-88, 1997
- [17] D. I. Hoult e P. C. Lauterbur, *The sensitivity of the zeugmatographic experiment involving human samples*, Journal of Magnetic Resonance n.34 pp. 425-433, 1979
- [18] R. M. Henkelman, *Measurement of signal intensities in the presence of noise in MR images*, Medical Physics, n.12 pp. 232-233, 1985